A LÓGICA NA MATEMÁTICA

1. *BREVE HISTÓRICO*

O pensamento lógico teve forte presença no cerne da Civilização Grega. Aristóteles (384-322 A.C) é tido como o primeiro sistematizador do conhecimento lógico da época. Presume-se que a partir de uma análise das discussões, que eram comuns no seu tempo, o filósofo teria procurado caracterizar um instrumento de que se serviria a razão, na busca da verdade. Aristóteles teve seu trabalho registrado por seus discípulos e a obra de Lógica, intitulada o *Organon,* serviu de fundamentação para a Lógica Simbólica. Aristóteles classificou as proposições em quatro grupos, dois originários de uma consideração qualitativa e dois de considerações quantitativas. Segundo a quantidade, tem-se proposições afirmativas ou negativas e, segundo a qualidade, em universais e particulares. Assim é que na lógica de Aristóteles aparecem expressões como todo, nenhum, algum, etc; e frases tipo "Todo homem é mortal " (universal afirmativa) e "Alguns homens não são sábios" (particular negativa).

Ainda na Grécia Antiga, surgiu a escola estóico-megárica que estudava a lógica das proposições, desenvolvendo aspectos não encontrados na Lógica Aristotélica.

Depois do período dos estóicos-megários, inicia-se um período obscuro, quase virgem de pesquisa. Segundo os elementos históricos existentes, não houve nenhuma contribuição original à Lógica por mais de 1000 anos. Houve apenas o trabalho de transmissão de conhecimentos antigos para a Idade Média. Destaca-se Boécio (470-524) com a tradução latina de parte da obra aristotélica.

Foi um longo período pobre de contribuições para esse ramo do conhecimento científico . Durante os séculos XVII e XVIII e início do século XIX o grande interesse era pela retórica e pelas questões psicológicas. Escapa dessa inflência Leibniz (1646 - 1716), cujas idéias originais e inovadoras ficaram isoladas no século XVII e só viriam a ser apreciadas e conhecidas no fim do século XIX. Assim é que o uso de diagramas para estudos de lógica, atribuído a Euler, já tinha sido utilizado por Leibniz. No entanto, foi John Venn (1834-1923) quem aperfeiçoou os diagramas no estudo da Lógica.

Leibniz foi o precursor da Lógica Moderna. Ele sugeriu uma espécie de Álgebra Universal, uma linguagem de símbolos que pudesse ser entendida por todos, qualquer que fosse a língua utilizada. Estava assim criado o ambiente adequado para o surgimento da Lógica Simbólica (também chamada de Lógica Matemática ou Lógica Formal) e cujo objetivo era dar um tratamento rigoroso, estrutural, ao conhecimento lógico tradicional.

O período "contemporâneo" da lógica tem suas raízes nos trabalhos de George Boole (1815-1864) que deu novos rumos ao estudo da matéria. A obra fundamental de Boole, *Investigations of the Laws of Thought,* publicada em 1854, compara as leis do pensamento às leis da álgebra. Paralelamente, De Morgan (1806-1871) também contribuiu para o desenvolvimento da álgebra da Lógica. Com os trabalhos de Boole e de Morgan a Lógica clássica torna-se autônoma, separando-se da filosofia para tornar-se a Lógica Matemática.

Os alemães Frege (1848-1925) e Cantor (1845-1918) deram impulsos à Lógica Simbólica. A tentativa de Frege de transformar a Matemática em ramo da Lógica levou a paradoxos depois estudados por Russel e Whithead, autores do "Principia Mathematica", uma das obras fundamentais deste século. Como consequência os lógicos e matemáticos entraram em divergência, a partir da segunda metade do século XIX, dando lugar ao surgimento de pelo menos três correntes de pensamento bem distintas: o logicismo (de Russel), o intuicionismo (de Brouwer) e o formalismo (de Hilbert).

A corrente logicista pretendeu reduzir a Matemática à Lógica, e seu pensamento está bem delineado na obra “Principia Mathematica” e suas origens estão certamente em Leibniz.

A corrente formalista - cujas raízes estão no filósofo alemão Kant, foi liderada por Hilbert. Amplia a atuação da Lógica caracterizando-a como um método de obter inferências legítimas . Uma teoria para ser formalizada deve conter conceitos primitivos, axiomas e teoremas e ser consistente. Ser consistente numa teoria formal significa que se ela contém determinada proposição, não pode conter a sua negação.

A escola intuicionista, cujo maior representante foi o matemático holandês Brouwer, reduz a Lógica a um método que se desenvolve paralelamente a Matemática. Para os seus seguidores, todos os conhecimentos existem por intuição, ou seja, sem auxílio de raciocínio. Rejeitam o príncipio do terceiro excluído, sendo, portanto possível para eles a construção de enunciados que não são verdadeiros ou falsos.

As críticas e divergências em torno dos fundamentos filosóficos do "Principia Matemática" deram lugar ao surgimento de lógicas polivalentes.

Atualmente a Lógica não está, como esteve, até por volta de 1930, dividida nas três correntes acima. Hoje, inúmeras correntes surgem e as três antigas se aproximam. Os estudos ganharam um ritmo acelerado, as especialidades se multiplicam e os problemas se abrem.

2. *PROPOSIÇÕES E CONECTIVOS*

A Lógica Matemática se ocupa da análise de certas sentenças, quase sempre de conteúdo matemático. Também estuda as relações, conexões, entre estas sentenças. Começaremos definindo proposição. Chama-se *proposição* uma sentença (conjunto de palavras e símbolos) declarativa, que exprime um pensamento de sentido completo, e que pode ser classificada como *verdadeira* ou *falsa*.

Os termos *"verdade"* e *"falsidade"* são chamados *valores lógico*s de uma proposição.

Para efeito de classificar as proposições em "verdadeiras" ou "falsas" a Lógica Matemática adota como regras fundamentais os dois seguintes princípios:

I) *Princípio da Não Contradição* - Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
II) *Princípio do Terceiro Excluído* - Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa (isto é, verifica-se sempre um desses casos e nunca um terceiro).

Pelos dois princípios anteriores temos que: *Toda proposição tem um e somente um dos valores lógicos "verdade" ou "falsidade*". Por este motivo, chamamos a Lógica Matemática de *bivalente*.

As proposições serão indicadas por letras p, q, r, s, t, ... e o seu valor lógico por V(p) = V (ou 1) para uma proposição verdadeira e, V(p) = F (ou 0) para uma proposição falsa.

Exemplos e contra-exemplos

1) p: Salvador é a capital da Bahia
2) q: $2 + 3 < 5$
3) r: O poeta Castro Alves era baiano.
4) $x + 2 = 1$
5) Como faz calor!
6) Que dia é hoje?

Como foi convencionado na definição, sentenças exclamativas ou interrogativas (exemplos 5 e 6) não são proposições. O exemplo 4 também não representa uma proposição, uma vez que não podemos atribuir um único valor lógico (depende de x).

As proposições podem ser classificadas em simples e compostas.

Proposições simples - Aquelas que não contêm nenhuma outra como parte integrante de si mesma. São também chamadas de *atômicas* .

Proposições compostas - Aquelas formadas pela combinação de proposições simples. São também chamadas de *moleculares* .

Como foi convencionado anteriormente as proposições simples serão indicadas por letras p, q, r, s, etc.. As proposições compostas serão denotadas por P, Q, R , S, etc..

Exemplos

	Proposição
1) 2 é ímpar	simples
2) 3 é ímpar *e* $\sqrt{2} \in Q$.	composta
3) $2 > 0$ *ou* $3 + 1 = 5$	composta
4) *Se* 4 é par *então* 4 é divisível por 2.	composta
5) 3 é ímpar *se e somente se* 3 é primo	composta

As palavras ou símbolos usados para formar novas proposições a partir de proposições dadas são chamados de *conectivos* .

Os conectivos fundamentais da Lógica Matemática são:

Conectivo	***Símbolo***	
1) não, não é verdade que	$\sim$	negação ou modificador
2) e	$\wedge$	conjunção
3) ou	$\vee$	disjunção
4) se ... então	$\rightarrow$	condicional
5) se e somente se	$\leftrightarrow$	bicondicional

Dadas as proposições simples p e q podemos com o uso dos conectivos formar novas proposições a partir de p e q. Assim, temos:

1) A negação de p	**~p**	não p
2) A conjunção de p e q	$\mathbf{p \wedge q}$	p e q
3) A disjunção de p e q	$\mathbf{p \vee q}$	p ou q
4) A condicional de p e q	$\mathbf{p \rightarrow q}$	se p então q
5) A bicondicional de p e q	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$	p se e somente se q

Exemplos

1) Dada as proposições:

p: Jorge Amado escreveu o livro "Mar Morto"

q: Rui Barbosa era baiano

temos para as seguintes, as traduções para a linguagem corrente

~p: Jorge Amado **não** escreveu o romance "Mar Morto".
ou
Não é verdade que Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto".

$p \wedge \sim q$: Jorge Amado escreveu o livro "Mar Morto" **e** Rui Barbosa **não** era baiano
ou
Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **e é falso que** Rui Barbosa era baiano.

$\sim p \vee q$: Jorge Amado **não** escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano.
ou
Não é verdade que Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano.

$\sim(p \vee q)$: **Não é verdade que:** Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano.

2) Sendo p: 2 é um número par e q: 6 é múltiplo de 3, para as seguintes proposições temos as traduções para a linguagem simbólica

a) 2 não é par ou 6 é múltiplo de 3 $\sim p \vee q$

b) Se 6 não é múltiplo de 3 então 2 é par $\sim q \rightarrow p$

c) 2 não é par, se e somente se, 6 é múltiplo de 3 $\sim p \leftrightarrow q$

3. *OPERAÇÕES LÓGICAS COM PROPOSIÇÕES CÁLCULO PROPOSICIONAL*

Quando trabalhamos com os conjuntos numéricos, definimos operações como a adição, multiplicação, etc. e estudamos as propriedades de tais operações, mostrando que tais conjuntos têm uma estrutura algébrica. No caso da Lógica não trabalhamos com números, mas com proposições. Já vimos que a partir de proposições simples podemos "combiná-las" mediante o uso de conectivos para formar novas proposições. O que queremos saber agora é: conhecidos os valores lógicos das proposições simples, qual o valor lógico da proposição resultante obtida com os conectivos? Na verdade os conectivos funcionam como símbolos operatórios, tais como $+$, $-$, $\div$, x. Precisamos portanto saber o "resultado" das operações envolvendo conectivos e proposições da Lógica.

Conhecendo-se os valores lógicos de duas proposições p e q, vamos definir os valores lógicos das proposições: $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, que decorrem de situações cotidianas, onde utilizamos o nosso bom senso, a nossa lógica. Nada mais natural que isto.

1) Negação

Dada uma proposição p, a negação de p tem valor lógico verdade quando p é falsa e valor lógico falsidade quando p é verdadeira. Isto pode ser resumido na seguinte tabela, denominada tabela verdade.

p	***~p***
V	F
F	V

Exemplo

p: 2 + 1 = 3 V(p) = V

~p : 2 + 1 ≠ 3 V(~p) = F

2) Conjunção

Dadas as proposições p e q, a proposição $p \wedge q$ é verdadeira quando as duas proposições forem verdadeiras, e é falsa se uma delas for falsa. Pode-se resumir o exposto na tabela a seguir.

p	***q***	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F

F	F	F

Exemplos

1) p: $2 < 5$

   q: $2 + 3 = 5$ V($p \wedge q$) = V

2) p: π é um número irracional

   q: 2 é ímpar

   V(p) = V e V(q) = F, logo V($p \wedge q$) = F

3) Disjunção

Dadas as proposições p e q a proposição $p \vee q$ é verdadeira quando pelo menos uma das proposições for verdadeira, e é falsa se as duas forem falsas. Resumindo,

p	***q***	***p ∨ q***
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo

p: 2 é ímpar

q: $3 > 0$ V ($p \vee q$) = V

4) Condicional

Dadas as proposições p e q , a proposição $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa e é verdadeira nos demais casos. Resumindo,

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo

p: 4 é ímpar
q: 3 é par $\qquad V(p \to q) = V$

Observações

1) Notemos que, quando o valor lógico da proposição p é falso, temos que a condicional é automaticamente verdadeira (não depende do valor lógico de q). Isto se justifica pelo fato de que se p é falsa , qualquer conclusão pode se tirar daí, verdadeira ou falsa. Por exemplo, se supusermos que $1 = 2$, podemos concluir que $0 = 1$ e também que $3 = 3$. Em outras palavras, se p é falsa, tudo é válido como nos ditados populares: " Se você é o dono da Coca-Cola então eu sou o rei da Inglaterra".

Isto dá origem a proposições sem nexo, absurdas, tais como: "Se 2 = 1 então a lua é de queijo", "Se a Terra é quadrada então 2 + 2 = 4", que apesar de serem verdadeiras, de acordo com a regra estabelecida, não tem nenhum sentido prático.

2) Na condicional $p \to q$ temos que:

p é chamado de antecedente e q é chamado de consequente.

3) A condicional também pode ser lida como: "p somente se q", "q, se p", "p é condição suficiente para q", "q é condição necessária para p".

4) Uma condicional $p \to q$ não afirma que o consequente se "deduz" do antecedente p, ou seja, pode não haver uma relação intrínseca entre p e q. O que a condicional afirma é unicamente a relação entre os valores lógicos de p e q, de acordo com a definição dada, isto é, a condicional $p \to q$ é uma operação, também chamada de "implicação material". Obviamente, na maioria dos casos, a Matemática vai estar interessada em condicionais verdadeiras, que vão <u>de fato</u> significar que p "implica" q. Veremos melhor isto quando estudarmos "implicação".

4) O exemplo a seguir pode nos ajudar a "justificar" o significado das condições "necessária" e "suficiente".

"Se o pássaro canta então está vivo".

i) O pássaro cantar é condição suficiente para ele estar vivo, ou seja, é suficiente o pássaro cantar para garantirmos que ele está vivo.

ii) O pássaro estar vivo é condição necessária para ele cantar, ou seja, é necessário que o pássaro esteja vivo para que ele possa cantar.

A partir da condicional $p \to q$ podemos obter as seguintes proposições:

i) $q \to p$ é a sua *recíproca*

ii) $\sim q \to \sim p$ é a sua *contrapositiva*

Exemplos

1) Dada a condicional: "Se 4 é par então 4 é divisível por 2", temos

i) a recíproca: "Se 4 é divisível por 2 então 4 é par"

ii) a contrapositiva: "Se 4 não é divisível por 2 então 4 não é par"

2) Dada a condicional: “Se $\sqrt{3}$ é um número irracional então $2\sqrt{3}$ é irracional”, temos

i) a recíproca: "Se $2\sqrt{3}$ é irracional então $\sqrt{3}$ é irracional”

ii) a contrapositiva: "Se $2\sqrt{3}$ não é irracional então $\sqrt{3}$ não é irracional”

5) Bicondicional

Dadas as proposições p e q a proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q tiverem os mesmos valores lógicos e é falsa nos demais casos. Resumindo,

p	*q*	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo

p: 3 é ímpar

q: 4 é divisivel por 2 $\quad$ $V(p \leftrightarrow q) = V$

Observações

1) A bicondicional também pode ser interpretada como a conjunção de duas condicionais: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

2) A bicondicional também pode ser lida como

i) p é condição necessária e suficiente para q.

ii) q é condição necessária e suficiente para p.

As definições que não são puramente nominais, são condições necessárias e suficientes. Por exemplo, ABC é um triângulo retângulo se e somente se ABC têm um ângulo reto.

Observação

É muito comum nos livros de Matemática, definições dadas por uma condicional como, por exemplo: um triângulo é retângulo se tem um ângulo reto. Entretanto, deve-se entender que a definição é sempre uma bicondicional.

4. *CONSTRUÇÃO DE TABELAS -VERDADE*

Cada proposição simples p tem dois valores: V ou F, que se excluem. Daí, para n proposições simples $p_1, p_2, \ldots p_n$, há tantas possibilidades quantos são os arranjos n a n, com repetição de 2 elementos (F e V), isto é, $A_{2,n} = 2^n$. Segue-se que o número de linhas da tabela-verdade é 2^n.

Exemplo

Construção da tabela-verdade das seguintes proposições:

1) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

p	*q*	*p ∨ q*	*~(p ∨ q)*	*~p*	*~q*	*~p ∧ ~q*	*~(p ∨ q) ↔ ~p ∧ ~q*
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

2) $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

p	*q*	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q)) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

3) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (r \wedge p)$

p	*q*	*r*	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$r \wedge p$	$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (r \wedge p)$
V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

Uma *tautologia* é uma proposição composta cujo valor lógico é a verdade quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes. Se P é uma tautologia, P também é chamada de proposição tautológica ou logicamente verdadeira. Uma tautologia é em geral indicada por V, T ou 1.

Exemplo

P: $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Uma *contradição* é uma proposição composta cujo valor lógico é a falsidade quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes.
Se P é uma contradição, P é também chamada de proposição contra-válida ou logicamente falsa. Uma contradição é em geral indicada por F , C ou 0.

Exemplo

Q: $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

Observações sobre o uso de parêntesis

Para evitar ambiguidades, em geral, colocamos parêntesis na simbologia das proposições compostas. Assim, por exemplo, a proposição P: $p \wedge q \vee r$ deve ser lida $(p \wedge q) \vee r$, ou seja na ordem de aparecimento dos conectivos.

Portanto, a supressão de parêntesis deve ocorrer por meio de convenções. Optaremos, pela seguinte ordem de precedência dos conectivos:

1) $\sim$; 2) $\wedge, \vee$ (na ordem de aparecimento); 3) $\rightarrow$; 4) $\leftrightarrow$.

Exemplo

A proposição $p \wedge q \vee r \leftrightarrow \sim r \rightarrow s$, deve ser lida como $((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((\sim r) \rightarrow s)$.

5. *EQUIVALÊNCIA*

Dizemos que uma proposição P é *logicamente equivalente* ou, simplesmente, *equivalente* a uma proposição composta Q se a bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é tautológica.
Usamos a notação $P \Leftrightarrow Q$
Da definição temos que se duas proposições são equivalentes então as suas tabelas-verdade são idênticas.

Observação

Os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são distintos!

$\leftrightarrow$ indica uma operação lógica.

$\Leftrightarrow$ estabelece que $P \leftrightarrow Q$ é tautológica. Não aparecem $V(P) = V$ e $V(Q) = F$ e vice-versa.

Exemplos

1) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

2) Se P e Q são ambas tautológicas ou ambas contradições então $P \Leftrightarrow Q$.

3) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

4) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

5) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

6) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

7) $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

8) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

9) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

10) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

11)) $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$

Todas as equivalências exemplificadas podem ser demonstradas pela construção das tabelas-verdade, ou utilizando o bom senso, em vários dos casos anteriores.

Por serem muito utilizadas em Matemática, destacamos as seguintes equivalências:

i) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$.

A condicional e sua contrapositiva são equivalentes; nesta equivalência se baseia o método de demonstração por absurdo.

ii) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

6. *ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES. PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES*

As operações lógicas gozam das seguintes propriedades que podem ser verificadas facilmente.

1. Dupla Negação	$\sim(\sim p)$	$\Leftrightarrow$	p
2. Idempotente	$p \wedge p$	$\Leftrightarrow$	p
	$p \vee p$	$\Leftrightarrow$	p
3. Comutativa	$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$q \wedge p$
	$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$q \vee p$
4. Associativa	$(p \wedge q) \wedge r$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge (q \wedge r)$
	$(p \vee q) \vee r$	$\Leftrightarrow$	$p \vee (q \vee r)$
5. Elemento Neutro	$p \wedge V$	$\Leftrightarrow$	p
	$p \vee F$	$\Leftrightarrow$	p
6. Elemento Absorvente	$p \wedge F$	$\Leftrightarrow$	F
	$p \vee V$	$\Leftrightarrow$	V
7. Distributiva	$p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	$p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. Absorção	$p \vee (p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	p
	$p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	p
9. Leis de De Morgan	$\sim(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \vee \sim q$
	$\sim(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \wedge \sim q$
10. Negação da Condicional	$\sim(p \rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge \sim q$
11. Negação da Bicondicional	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

Observação

Todas as equivalências continuam sendo válidas quando substituimos as proposições simples por proposições compostas.

Exemplo

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

7. *MÉTODO DEDUTIVO*

A maioria das equivalências foram demonstradas até aqui pelo "método das tabelas-verdade". Veremos agora a demonstração de equivalências por um método mais eficiente, denominado "método dedutivo".

No emprego do "método dedutivo" desempenham papéis importantes as equivalências relativas à álgebra das proposições, que subsistem quando as proposições simples são substituídas por proposições compostas.

Exemplos

1) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge {\sim}q \rightarrow F$ (Redução ao absurdo)

D] $(p \wedge {\sim}q) \rightarrow F \Leftrightarrow {\sim}(p \wedge {\sim}q) \vee F \Leftrightarrow {\sim}(p \wedge {\sim}q) \Leftrightarrow {\sim}p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

2) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

D] $p \vee q \rightarrow q \Leftrightarrow {\sim}(p \vee q) \vee q \Leftrightarrow ({\sim}p \wedge {\sim}q) \vee q \Leftrightarrow ({\sim}p \vee q) \wedge ({\sim}q \vee q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ({\sim}p \vee q) \wedge V \Leftrightarrow ({\sim}p \vee q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$

O exemplo a seguir exemplifica como as equivalências são utilizadas nas demonstrações em Matemática.

Considere o seguinte Teorema: Dadas três retas distintas a, b, c, do plano, se $a \parallel b$ e $b \parallel c$ então $a \parallel c$.

Provaremos usando **redução ao absurdo**, isto é, $a \parallel b$ e $b \parallel c$ e $a \nparallel c \rightarrow F$.

D]

i) $a \not\parallel c \rightarrow a \cap c \neq \varnothing$

ii) $a \cap c \neq \varnothing$ e $a \,//\, b$ e $b \,//\, c \rightarrow a = c$ (axioma das paralelas)

iii) $a = c$, é uma contradição, pois por hipótese as retas são distintas.

Exercícios

1) Dê a negação das seguintes proposições:

A) Irei à praia e não irei ao cinema

B) É suficiente cantar para estar vivo.

C) É suficiente ser divisível por 2 para ser um número par.

D) É necessário ser um número ímpar para ser primo ou ser divisível por 3

E) Se um triângulo ABC é retângulo e $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são ângulos agudos então $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o$.

2) Utilizando as propriedades operatórias, simplifique as seguintes proposições:

A) $(p \vee (p \wedge q)) \wedge \sim(p \wedge q)$

B) $(p \wedge \sim(q \vee r)) \vee (p \wedge \sim(p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge \sim(p \wedge \sim r))$

C) $\sim p \rightarrow \sim(p \wedge q)$

3) Mostre, sem utilizar tabela-verdade (método dedutivo) as seguintes equivalências:

A) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

B) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$

C) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$

D) $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \rightarrow r$

8. *CIRCUITOS DE CHAVEAMENTO*

Os últimos dez anos vêm presenciando um aumento acelerado da aplicação da Matemática, principalmente da Álgebra, no entendimento e solução dos problemas das Ciências da Computação. As estruturas algébricas estão sendo, cada vez mais, empregadas na modelagem e controle de circuitos eletrônicos e d sistemas de informações. É importante, portanto, que a álgebra aplicada à computação, em especial a Lógica venha sendo introduzida nas escolas de 2º e 3º graus .

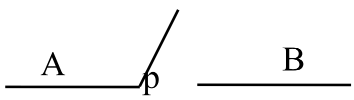
Vamos exemplificar, através dos circuitos, como a estrutura algébrica da Lógica pode ser útil no desenvolvimento da eletrônica. O modelo da aplicação que mostraremos pode ser desenvolvido e estendido para outras áreas. Ele é usado nos estudo de automação e leva a simplificações que permitem redução de custos e economia de tempo em projetos com os quais possa relacionar-se.

Circuito com um interruptor

Chamamos interruptor ao dispositivo ligado a um ponto de um circuito elétrico que pode assumir um dos dois estados: aberto ou fechado

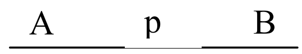
Designamos o interruptor pela letra p. Quando o interruptor está aberto a corrente não atravessa o circuito, atribuímos o valor 0 para p e indicamos

V(p) = 0



Quando o interruptor está fechado a corrente atravessa o circuito, atribuímos o valor 1 para p e indicamos

V(p) = 1



Circuito com dois interruptores

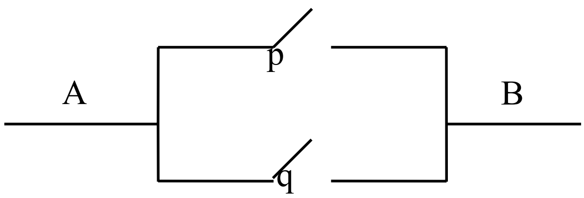
1. Circuito em série

A corrente só atravessa este circuito quando os dois interruptores estão fechados. Portanto este circuito pode ser representado por F = F (p,q) que satisfaz a tabela a seguir:

p	*q*	*F*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Observe que **F (p,q) = p $\wedge$ q**

2. Circuito em paralelo



A corrente atravessa este circuito quando pelo menos um dos interruptores está fechado. Este circuito pode ser representado pela função F= F(p,q) que satisfaz a tabela a seguir:

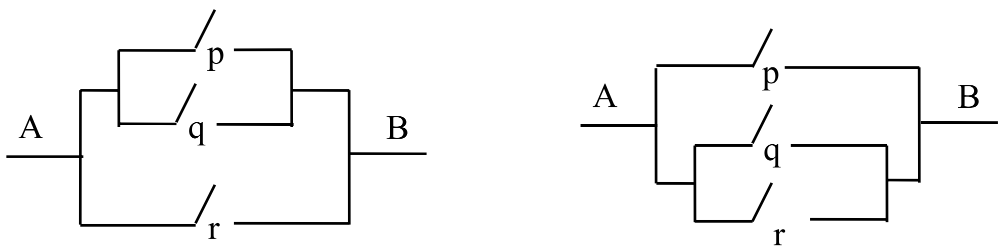
p	*q*	*F*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Observe que **F (p,q) = p $\vee$ q**.

São válidas as propriedades:

1.Comutativa

2. Associativa : Nos dois esquemas, a corrente passa pelo circuito, quando pelos menos um dos interruptores está fechado.



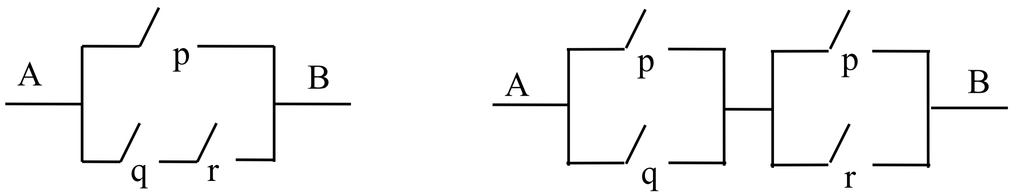
$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

Nos dois esquemas a seguir, a corrente só atravessa o circuito quando p, q e r estão fechados.

$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

3. Distributiva

Nas duas situações, a corrente passa quando p estiver fechado ou q e r estiverem fechados. Nos outros casos, a corrente não atravessa os circuitos.



$$p \vee (q \wedge r) \;=\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

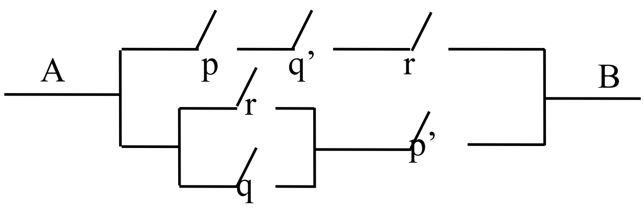
Até agora trabalhamos com circuitos em que os interruptores eram independentes; porém dois ou mais interruptores podem estar conectados da seguinte forma

a) quando um liga, o outro desliga e reciprocamente

b) quando um liga, o outro liga. Quando um desliga, o outro também faz o mesmo.

No caso a) denotaremos um interruptor por p e outro por p’, no caso b) denotaremos os dois interruptores pela mesma letra. O caso a) comporta-se como a operação complementar.

Usando mais interruptores, podemos obter vários circuitos mais complicados, como por exemplo:



O circuito acima pode ser representado pela função $F(p,q,r) = (p\wedge q'\wedge r)\vee[(r\vee q)\wedge p']$

p	***q***	***r***	***$p\wedge q'\wedge r$***	***$(r\vee q)\wedge p'$***	***F***
1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

Logo, a corrente passa através do circuito nos seguintes casos:

a) p e r estão fechados e q está aberto ($p\wedge q'\wedge r$)

b) q e r estão fechados e p está aberto ($p'\wedge q\wedge r$)

c) q fechado , p e r estão abertos ($p'\wedge q\wedge r'$)

d) r está fechado, p e q estão abertos ($p'\wedge q'\wedge r$)

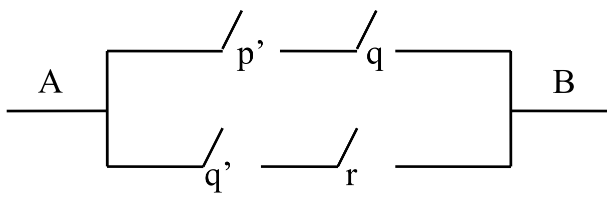
Como estamos interessados em circuitos que passem corrente, podemos simplificar o circuito acima considerando apenas as linhas da tabela anterior nas quais F = 1

Assim, obtemos:

$F = (p\wedge q'\wedge r) \vee(p'\wedge q\wedge r) \vee((p'\wedge q\wedge r') \vee((p'\wedge q'\wedge r) =$

$[(p'\wedge q) \wedge(r\vee(r')] \vee([(q'\wedge r)) \wedge((p\vee(p')]= (p'\wedge q) \vee((q'\wedge r)$

Que pode ser representado pelo esquema.



Observação

Podemos também simplificar circuitos, usando equivalências conhecidas.

9. *IMPLICAÇÃO LÓGICA*

Diz-se que uma proposição P *implica logicamente* ou, simplesmente, *implica* uma proposição Q, se Q é verdadeira sempre que P for verdadeira. Indicamos $P \Rightarrow Q$.

Como consequência imediata da definição temos que $P \Rightarrow Q$ significa que a condicional $P \rightarrow Q$ é tautológica, isto é, $P \rightarrow Q \Leftrightarrow V$

De fato. Pela definição, se temos que $P \Rightarrow Q$, então não ocorre a situação $V(P) = V$ e $V(Q) = F$ que é o único caso em que a condicional é falsa. Logo, $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Observação

Os símbolos $\Rightarrow$ e $\rightarrow$ são distintos!

$\rightarrow$ indica uma operação lógica

$\Rightarrow$ estabelece que a condicional $P \rightarrow Q$ é tautológica. Não ocorre portanto $V(P) = V$ e $V(Q) = F$.

Para demonstrar uma implicação, $P \Rightarrow Q$, podemos também utilizar o método dedutivo, que neste caso consiste em mostrar que $P \rightarrow Q \Leftrightarrow V$.

Exemplos

1) O pássaro canta $\Rightarrow$ o pássaro está vivo.

2) x é par $\Rightarrow$ x é divisível por 2

3) x é um número primo $\Rightarrow$ $x = 2$ *ou* x é ímpar.

4) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

5) $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge (x \neq y) \;\Rightarrow\; x = 0$

6) $(x = y \vee x < 4) \wedge (x \geq 4) \;\Rightarrow\; x = y$

Algumas implicações lógicas se destacam por terem papel importante nas demonstrações matemáticas. Tais implicações são chamadas de *Regras de Inferência.* Vejamos alguns exemplos.

1. Regra da Adição (A.D.)

$p \Rightarrow p \vee q$

$q \Rightarrow p \vee q$

2. Regra da Simplificação (SIMP)

$p \wedge q \Rightarrow p$

$p \wedge q \Rightarrow q$

3. Regra do Modus Ponens (M.P)

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

4. Regra do Modus Tollens (M.T)

$(p \rightarrow q) \wedge {\sim}q \Rightarrow {\sim}p$

5. Regra do Silogismo Hipotético (S.H)

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

Há teoremas em Matemática que são da forma $P \Rightarrow Q$, isto é, uma condicional $P \rightarrow Q$ tautológica, onde P é chamada de “hipótese” e Q é a “tese”. Então, tudo que foi dito anteriomente vale para teoremas desse tipo. Assim se $P \rightarrow Q$ é um teorema, então, se $Q \rightarrow P$ é verdade, temos que a recíproca do teorema é verdadeira; se $P \rightarrow Q$ é um teorema, $\sim Q \rightarrow \sim P$ é um teorema (contrapositiva).

Exercício

Escreva a recíproca e a contrapositiva das proposições, e verifique se a recíproca é verdadeira.

a) Se o triângulo ABC é retângulo em A então o triângulo tem dois ângulos agudos, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

b) Se dois ângulos A e B tem lados paralelos então A e B são congruentes.

10. *A LÓGICA NA TEORIA DOS CONJUNTOS*

Vejamos a utilização da Lógica na Matemática dando exemplos na Teoria dos Conjuntos. Vamos supor conhecidos os conceitos primitivos de conjunto, elemento, a relação de pertinência entre elemento e conjunto, o conjunto-universo, conjunto vazio etc.. Usamos o símbolo $a \in A$ para indicar que o elemento a pertence ao conjunto A. Usamos o símbolo $a \notin A$ para indicar que o elemento a não pertence ao conjunto A.

Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B ou que é *subconjunto* de B e indicamos $A \subset B$ se e somente se todo elemento que pertencer a A pertencer também a B. Em linguagem simbólica temos:

$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Assim, se queremos mostrar que um conjunto A está contido em um conjunto B, devemos mostrar a implicação $x \in A \Rightarrow x \in B$, isto é, assumindo que $x \in A$ é verdade, mostrar que $x \in B$ é verdade.

Dados os conjuntos A e B temos que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$.

A conjunção e a disjunção são operações lógicas usadas nas definições de união e interseção entre dois conjuntos A e B.

Sejam A e B dois conjuntos dados, subconjuntos de um determinado universo U. Definimos:

1) A *união* de A e B como sendo o conjunto $A \cup B = \{ x \in U; x \in A \vee x \in B \}$

2) A *intersecção* de A e B como sendo o conjunto $A \cap B = \{ x \in U; x \in A \wedge x \in B \}$

Dados os conjuntos A e B chama-se *diferença* entre os conjuntos A e B e indica-se $A - B$ o conjunto de todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$A - B = \{ x \in U;\ x \in A \wedge x \notin B \}$.

Quando $A \subset B$, a diferença $B - A$ é chamada de complementar de A em relação a B e indica-se $C_B A = B - A$. No caso de B ser o conjunto universo indicamos simplesmente C_A, $\overline{A}$ ou ainda A'.

Pelas definições vistas vemos que as operações lógicas estão intimamente relacionadas com as operações entre conjuntos. Podemos estabelecer as relações:

Conjunção	x	interseção	$\wedge$, $\cap$
Disjunção	x	união	$\vee$, $\cup$
Condicional	x	relação de inclusão	$\rightarrow$, $\subset$
Bicondicional	x	igualdade	$\leftrightarrow$, =
Negação	x	complementar	~, **C**
Contradição	x	conjunto vazio	**F**, $\varnothing$
Tautologia	x	conjunto universo	**V**, **U**

Consideremos as seguintes propriedades relativas a conjuntos

Propriedades: Dados A, B e C subconjuntos quaisquer de U temos,

1. $\varnothing \subset A$

2. a) $A \subset A \cup B$ b) $A \cap B \subset A$

3. a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$

4. a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$

5. a) $A \cup \varnothing = A$ b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

6. a) $A \cup U = U$ b) $A \cap U = A$

7.a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

8. a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

9). $\overline{\overline{A}} = A$

10. a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

11. a) $A \cup \overline{A} = U$ b) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

12. a) $\overline{\varnothing} = U$ b) $\overline{U} = \varnothing$

Todas essas propriedades são demonstradas facilmente, utilizando a lógica e as relações que já estabelecemos. Demonstraremos algumas e deixaremos o restante como tarefa para o leitor.

D] 1. Devemos mostrar que $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. Temos:

Para todo $x \in U$ a proposição "$x \in \varnothing$" é falsa e portanto a proposição "$x \in \varnothing \rightarrow x \in A$" é verdadeira.

2. a) Devemos mostrar que "$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$".

Segue da implicação $p \Rightarrow p \vee q$ (adição) que "$x \in A \Rightarrow$ $x \in A$ ou $x \in B$".

Portanto "$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$"

8. a) Devemos mostrar que "$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$" ou seja, que .

"$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$. Esta equivalência segue da propriedade $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

11. *ARGUMENTOS*

Um dos problemas centrais da Lógica é a investigação do processo de raciocínio. Em toda ciência dedutiva um certo conjunto de proposições é aceito sem demonstração (axiomas) e, deste conjunto outras proposições são derivadas por raciocínio lógico.

Nosso objetivo agora é investigar os processos que serão aceitos como válidos na derivação de uma proposição chamada de *conclusão*, a partir de proposições dadas chamadas *premissas*.

Exemplos

1) P_1 : Se chove então fica nublado.
   P_2 : Choveu.
   Conclusão - Q: Está nublado.

2) P_1: Se fizer sol então irei à praia.
   P_2: Não fui à praia.
   Conclusão - Q: Não fez sol.

3) P_1: Se eu fosse cantora então seria artista.
   P2: Não sou cantora.
   Conclusão - Q: Não sou artista.

4) P_1: Todo professor de Matemática é licenciado em Matemática..
   P2: Todos os cursistas do Pró-Ciências são professores de Matemática.
   Conclusão - Q: Todos os cursistas são licenciados em Matemática.

Analisando os exemplos 1), 2) e 4) acima, podemos observar que as conclusões são deduzidas a partir das premissas assumindo a veracidade das mesmas, o mesmo não acontecendo com o exemplo 3).

Cabe observar que uma conclusão pode ser deduzida a partir de sentenças falsas. Isto pode conduzir a conclusões não necessariamente verdadeiras, como no Exemplo 4 acima. Como veremos a seguir, **a lógica está interessada em verificar se a conclusão decorre das premissas, assumindo que as mesmas são verdadeiras.**

A verdade ou falsidade das asserções isoladas é da competência dos especialistas. Daremos a seguir o conceito de "argumento".

Definição: Sejam $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ e Q proposições quaisquer. Chama-se *argumento* toda afirmação de que as proposições $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ têm como consequência ou acarretam uma proposição final Q.

$P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ são chamadas de *premissas* e Q de *conclusão*.

Usamos a notação $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \vdash Q$, que podem ser lidas das seguintes maneiras:

i) $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ acarretam Q

ii) Q decorre de $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$

iii) Q se deduz de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Observação:

Um argumento que contém duas premissas é chamado de *silogismo*.

Definição: Um argumento $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \vdash Q$ diz-se *válido* se, e somente se, a conclusão Q é verdadeira sempre que as premissas $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ forem todas *consideradas verdadeiras*. Um argumento que não é válido diz-se um *sofisma*.

Teorema (Critério de Validade de um Argumento)

Um argumento $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \vdash Q$ é válido $\Leftrightarrow$ $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ é uma tautologia $\Leftrightarrow$ $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$.

D] As premissas $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ são todas verdadeiras se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n$ é verdadeira. Logo, o argumento $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a conclusão Q é verdadeira sempre que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n$ é verdadeira, ou seja, se e somente se a proposição

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n$ implica logicamente a conclusão Q, o que é equivalente a afirmar que a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é tautológica.

Exemplo

P_1: Se eu fosse cantora então seria artista.
P_2: Não sou cantora.
Conclusão - Q: Não sou artista.
$P_1, P_2 \vdash Q$
O argumento não é válido, pois podemos ter a situação V(Q) = F e $V(P_1 \wedge P_2) = V$. De fato, Fernanda Montenegro é artista mas não é cantora.

12. *MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DA VALIDADE DE UM ARGUMENTO*

Tabela-Verdade

Dado o argumento $P_1, P_2, P_3, ... P_n \vdash Q$ a este argumento corresponde a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ chamada de condicional associada ao argumento dado, cujo antecedente é a conjunção das premissas e o consequente é a conclusão. Para testarmos a validade do argumento temos, pelo critério de validade, que verificar se a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é tautológica. A tabela-verdade é portanto o método mais geral para se testar a validade de um argumento.

Exemplos

1) $P_1, P_2, P_3 \vdash Q$

P_1: João vai ao cinema ou vai ao clube.

P_2: Se vai ao clube, então telefona.

P_3: João não telefonou.

Q: João foi ao cinema.

Consideremos: p: João vai ao cinema, q: João vai ao clube, r: João telefona.

O argumento reescrito em linguagem simbólica fica: $p \vee q, q \rightarrow r, \sim r \vdash p$

Usando o critério de validade verificamos, pela tabela-verdade, que a condicional

$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (\sim r) \rightarrow p$ é tautológica. Logo, o argumento é válido

			(1)	(2)	(3)	(4)	
p	q	r	$p \vee q$	$q \rightarrow r$	~r	(1) ∧(2)∧(3)	(4) → p
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	V

2) $P_1, P_2 \vdash Q$

P_1: Se eu fosse cantora então seria artista.

P_2: Não sou cantora

Q: Não sou artista

Consideremos: p: Sou cantora, q: Sou artista.

O argumento em linguagem simbólica fica: $p \rightarrow q,\ \sim p \vdash \sim q$

Construindo a tabela-verdade da condicional $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p) \rightarrow \sim q$ obtemos:

		(1)	*(2)*	*(3)*		
p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$(1) \wedge (2)$	$\sim q$	$(3) \rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Vemos pela tabela que a condicional não é tautológica, logo, a condicional é um sofisma!

Analisando a quarta linha da tabela verdade observamos que os valores lógicos V(p) = F, V(q) = V(r) = V nos mostram a situação em que temos $V(P_1 \wedge P_2) = V$ e V(Q) = F. Isto mostra a não-validade do argumento.

De uma maneira geral mostrar a *não-validade* de um argumento consiste em encontrar uma atribuição de valores lógicos às proposições simples, componentes do argumento, que torne todas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

O método da tabela-verdade permite demonstrar ou testar a validade de qualquer argumento, mas o seu emprego torna-se cada vez mais trabalhoso a medida que aumenta o número de proposições simples componentes dos argumentos. Assim, vamos buscar outros métodos mais eficientes para a análise da validade de um argumento.

Demonstração Indireta

Um outro método utilizado para se mostrar a validade, ou não, de um argumento $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \vdash Q$ é o chamado *método da demonstração indireta,* ou demonstração por absurdo, que consiste em negar a conclusão, isto é, supor V(~Q) =V e deduzir logicamente uma contradição qualquer, ou seja a negação de alguma premissa.

Este método está baseado na equivalência entre a condicional e a sua contrapositiva, isto é, $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$. Assim,

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P_1 \vee \sim P_2 \vee \sim P_3 \vee \ldots \vee \sim P_n$$

Uma vez que as premissas são admitidas como verdadeiras, chegar à negação de uma delas é uma contradição.

Exemplo

Use o método da demonstração indireta para analisar a validade dos seguintes argumentos.

1) $P_1, P_2, P_3 \vdash Q$

P_1: João vai ao cinema ou vai ao clube.

P_2: Se vai ao clube, então telefona.

P_3: João não telefonou.

Q: João foi ao cinema.

Supondo que João não foi ao cinema, então por P_1 ele vai ao clube. Segue de P_2 que João telefonou, o que contradiz P_3. Logo o argumento é válido.

Esquematizando temos: p: João vai ao cinema, q: João vai ao clube, r: João telefona

O argumento reescrito em linguagem simbólica fica: $p \vee q,\ q \rightarrow r,\ \sim r \ \vdash p$

P_1: $p \vee q$

P_2: $q \rightarrow r$

P_3: $\sim r$

Q: p

Vamos assumir que V(Q) = V(p) = F. De P_1 temos que V(q) = V. Com este valor para q segue de P_2 que V(r) = V, o que contradiz P_3 . Logo, o argumento é válido.

2)

P_1: $p \rightarrow q \vee r$

P_2: $p \wedge q$

P_3: $q \vee r \rightarrow p$

Q: $p \wedge r$

Suponhamos V(Q) =V($p \wedge r$) = F. Temos duas alternativas:

a) V(p) = F; b)V(r) =F

Analisando separadamente temos:

a) V(p) = F

Neste caso temos uma contradição em P_2.

b) V(r) = F

Temos por P_2 que V(p) = V(q) = V. Com estes valores temos V(P_1) = V(P_2) = V(P_3) = V e V(Q)= F. De b) podemos concluir que o argumento é um sofisma.

3) P_1: $\sim p \vee \sim q$

P_2: $r \vee s \rightarrow p$

P_3: $\sim s \vee q$

P_4: $\sim r$

Q: $\sim(r \vee s)$

Suponhamos $V(Q) = V(\sim(r \vee s)) = F \Leftrightarrow V(\sim r \wedge \sim s) = F$. Temos duas alternativas:

a) $V(r) = V$

Este caso contradiz P_4.

b) $V(s) = V$

Se $V(s) = V$ temos por P_3 que $V(q) = V$. Então $V(p) = F$ em P_1, o que contradiz P_2. De a) e b) podemos concluir que o argumento é válido.

4) P_1: $p \rightarrow q \vee r$

P_2: $r \leftrightarrow s$

P_3: $q \vee \sim p$

Q: $\sim p \wedge q$

Suponhamos $V(Q) = V(\sim p \wedge q) = F$. Temos duas alternativas: a) $V(p) = V$ ou b) $V(q) = F$.

a) $V(p) = V$:

Se $V(p) = V$ temos que $V(q) = V$, por P_3. Isto acarreta $V(P_1) = V$, independentemente do valor de r. Basta portanto atribuirmos os mesmos valores a r e s para obtermos $V(P_2) = V$. Temos assim, valores lógicos para p, q, r e s tais que todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Podemos portanto concluir que o argumento não é válido sem precisar analisar a outra alternativa.

Dos exemplos analisados podemos tirar as seguintes conclusões:

1. Para analisarmos a validade de um argumento pelo método da demonstração indireta , negamos a conclusão. Se chegarmos à negação de uma das premissas então o argumento é *válido*. Se conseguirmos valores lógicos paras proposições componentes que tornam as premissas verdadeiras e a conclusão falsa então o argumento é um *sofisma*.

2. Quando a negação de Q nos leva a mais de uma alternativa para ser analisada, temos que analisar todas para concluir que o argumento é válido. Se ao analisarmos uma das alternativas encontramos valores que tornam as premissas verdadeiras e a conclusão falsa já podemos garantir que o argumento é um sofisma e não precisamos analisar as outras situações.

3. A prova da não validade de um argumento consiste em apresentar valores para as proposições que tornem as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. É óbvio que toda vez que for possível encontrar essa atribuição de valores sem utilizar tabela-verdade evita-se um bom trabalho. O método da demonstração indireta nos permite chegar a esses valores.

Vejamos alguns exemplos de como o método da demonstração indireta está presente nas demonstrações matemáticas. Vamos mais uma vez utilizar a Teoria dos Conjuntos para a nossa ilustração.

1) Mostre que $(A - B) \cap B = \varnothing$

D] Suponhamos, por absurdo, que $(A - B) \cap B \neq \varnothing$. Então existe um elemento x tal que $x \in A - B$ e $x \in B$ o que é equivalente a afirmar que $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \in B$, o que é uma contradição!

2) Mostre que: Se $A \subset B$, $C \subset D$ e $B \cap D = \varnothing$ então $A \cap C = \varnothing$.

Nossas premissas neste caso são:

$P_1 : A \subset B$

$P_2 : C \subset D$

$P_3 : B \cap D = \varnothing$

e a conclusão é:

$Q : A \cap C = \varnothing$

D] Vamos negar a conclusão, isto é, supor $A \cap C \neq \varnothing$. Assumindo as premissas verdadeiras vamos usar "argumentos" que nos levem a uma contradição. Se $A \cap C \neq \varnothing$, temos que existe um elemento x tal que $x \in A$ e $x \in C$. De P_1 e P_2 concluímos que $x \in B$ e $x \in D$. Mas, isto contradiz a premissa P_3.

14. *SENTENÇAS ABERTAS*

O cálculo proposicional é insuficiente para a Matemática. Considere os seguintes exemplos:

a) Existe triângulo retângulo.

b) Quaisquer que sejam os pontos A e B, existe uma reta a tal que $A, B \in a$.

O teorema a) trata-se de teorema existência, que tem um quantificador existencial e o teorema b) apresenta um quantificador universal. Por este motivo faz-se necessário o estudo do cálculo de predicados (proposições quantificadas).

Há expressões às quais não podemos atribuir os valores lógicos "falso" ou "verdadeiro", como, por exemplo:

1. $x + 1 = 0$
2. $x + y = 1$
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

A depender do valor atribuído a x em 1), a x e y em 2) e a x, y e z em 3), as expressões acima passam a ter um valor lógico V ou F, passando a ser proposições.

Chama-se *sentença aberta* com *uma variável* em um conjunto A, uma expressão que indicaremos por p(x), tal que p(a) é verdadeira ou falsa para todo elemento a pertencente a A. A sentença aberta também é chamada de *função proposicional*, o conjunto A de *conjunto-universo* e o conjunto dos elementos de A tais que p(a) é verdade é chamado de *conjunto-verdade* que indicaremos por V_p

$V_p = \{ a \in A; V(p(a)) = \mathbf{V} \}$

Exemplos

1. Determinemos o conjunto-verdade das seguintes sentenças abertas nos conjuntos indicados.

a) p(x): $2x - 1 = 3$, em *N* $V_p = \{2\}$

b) p(x): $x^2 - 1 = 0$, em *Z* $V_p = \{-1, 1\}$

c) p(x): $x > 3$, em $A = \{-1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $V_p = \{4, 5, 6, 7\}$

Operações Lógicas com Sentenças Abertas

As operações lógicas sobre proposições se estendem naturalmente as sentenças abertas. Assim, dadas as sentenças p(x) e q(x) podemos obter novas sentenças como:

1) $\sim p(x)$

2) $p(x) \wedge q(x)$

3) $p(x) \vee q(x)$

4) $p(x) \rightarrow q(x)$

5) $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Admite-se todas as regras e propriedades dos conectivos para estes casos.

Exemplos

Determinemos o conjunto verdade em $A = \{ -1, 0, 1 \}$ para cada uma das seguintes sentenças abertas.

1) $p(x)$: $x + 1 = 1$, logo $V_p = \{0\}$

$\sim p(x) : x + 1 \neq 1$, $V_{\sim p} = \{-1, 1\}$. Observe que $V_{\sim p} = A - V_p$.

Generalizando, se $p(x)$ é uma sentença aberta em A então $V_{\sim p} = A - V_p$.

2) $p(x) \wedge q(x)$: $x + 1 = 1 \quad \wedge \quad x \geq -1$

$$V_{p \wedge q} = \{0\}$$

Generalizando, se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas em A então $V_{p \wedge q} = V_p \cap V_q$

3) $p(x) \vee q(x)$: $x^2 = 1 \;\vee\; x + 1 = 1$

$$V_{p \vee q} = \{-1, 0, 1\}$$

Generalizando, se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas em A então $V_{p \vee q} = V_p \cup V_q$.

4) $p(x) \rightarrow q(x)$: $x + 1 \in A \;\rightarrow\; x + 1 = 0$

Lembremos que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, logo $V_{p \rightarrow q} = \{-1,1\}$.

Generalizando, se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas em A então $V_{p \rightarrow q} = V_{\sim p} \cup V_q$

5) $p(x) \leftrightarrow q(x)$: x é par $\leftrightarrow x \geq 0$

Lembremos que $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, assim $V_{p \leftrightarrow q} = \{-1,0\}$.

Generalizando, se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas em A temos

$V_{p \leftrightarrow q} = V_{p \rightarrow q} \cap V_{q \rightarrow p}$

15. *QUANTIFICADORES*

Podemos transformar sentenças abertas em proposições usando expressões como "para todo", "qualquer que seja", "existe um", etc.

Exemplos

1) Consideremos a sentença aberta p(x): x + 1 = 1. A partir desta sentença podemos formar as seguintes proposições:

Existe x pertencente a Z; x + 1 = 1

Para todo x pertencente a Z, x + 1 = 1

2) Existe $x \in N$ tal que $\sqrt{x} \in Z$

3) Para todo $x \in Q$, $\sqrt{x} \in R$

4) Qualquer que seja o número natural ele é inteiro

5) Existe um número primo par.

Notamos as expressões "qualquer que seja", "existe", "para todo". Estas expressões chamam-se quantificadores.

É importante notar que uma sentença aberta com todas as variáveis quantificadas é uma proposição, pois ela assume um dos valores F ou V.

Quantificador Universal

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto A e seja V_p o seu conjunto-verdade. Considere as seguintes proposições:

Qualquer que seja $x \in A$, p(x), ou

Para todo $x \in A$, $p(x)$.

Simbolicamente, temos $\forall x, x \in A, p(x)$.

Se $V_p = A$ então a proposição $\forall x, x \in A, p(x)$ é verdadeira.

Se $V_p \neq A$ então a proposição $\forall x, x \in A, p(x)$ é falsa.

Em outras palavras, dada a sentença aberta $p(x)$ em A, o símbolo $\forall$ referido à variável x representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição. A esta operação lógica dá-se o nome de *quantificação universal* e ao respectivo símbolo de *quantificador universal*.

Exemplos

1) $\forall x \in N; x \geq 0$ (V)

2) $\forall x \in Q; \sqrt{x} \in R$ (F)

Quantificador existencial

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto A e seja V_p o seu conjunto-verdade. Considere a seguinte proposição:

Existe $x \in A$, $p(x)$, ou

Existe pelo menos um $x \in A$, $p(x)$.

Simbolicamente, temos $\exists x, x \in A, p(x)$.

Se $V_p \neq \varnothing$ então a proposição $\exists x, x \in A, p(x)$ é verdadeira.

Se $V_p = \varnothing$ então a proposição $\exists x, x \in A, p(x)$ é falsa.

Em outras palavras, dada a sentença aberta $p(x)$ em A, o símbolo $\exists$ referido à variável x representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição. A esta operação lógica dá-se o nome de *quantificação existencial* e ao respectivo símbolo de *quantificador existencial*.

Exemplos

$\exists\ x \in N; x + 1 < 3$ (V)

1) $\exists\ x \in Z; 2x + 1 = 0$ (F)

Negação de proposições com quantificadores

Os quantificadores existencial e universal podem ser precedidos do símbolo de negação (~). Por exemplo, negar a proposição "Todo número primo é ímpar" é afirmar "Nem todo número primo é ímpar" ou "Existe um número primo que não é ímpar". Simbolicamente: ~($\forall$ x primo, x é ímpar) $\Leftrightarrow$ $\exists$ x primo, x não é ímpar.

De uma maneira geral temos: $\sim(\forall x; p(x)) \Leftrightarrow \exists x; \sim p(x)$

$$\sim(\exists x; p(x)) \Leftrightarrow \forall x; \sim p(x)$$

Mostrar que uma proposição do tipo "$\forall x \in A; p(x)$" é falsa é mostrar que "$\exists x_o \in A; V(p(x_o)) = F$". Um elemento x_o de A que satisfaz a condição acima é dito um *contra-exemplo*.

16. *ARGUMENTOS E DIAGRAMAS DE VENN*

A teoria dos conjuntos é bastante útil na verificação da validade de determinados argumentos, quando as premissas envolvem proposições quantificadas.

Consideremos o seguinte exemplo:

P_1: Bebês são ilógicos.

P_2: Ninguém é desprezado se pode domar crocodilos.

P_3: Pessoas ilógicas são desprezadas.

Q: Bebês não podem domar crocodilos.

Consideremos:

B = Conjunto dos bebês

I = Conjunto das pessoas ilógicas

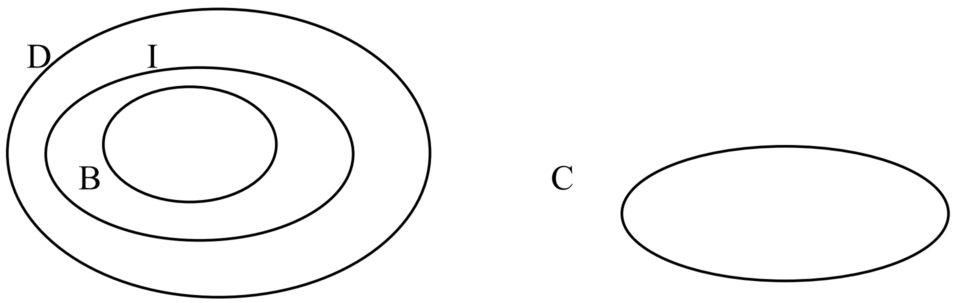
D = Conjunto das pessoas desprezadas

C = Conjunto dos domadores de crocodilos

Das premissas podemos concluir que:

1) $B \subset I$ (P_1) 2) $D \cap C = \varnothing$ (P_2) 3) $I \subset D$ (P_3)

Vejamos o diagrama correspondente:



O diagrama nos mostra que a conclusão é válida

Exemplo

Verifique a validade dos seguintes argumentos através de diagramas de Venn.

1. P_1 : Alguns estudantes são preguiçosos.

   P_2 : Todos os homens são preguiçosos

   Q : Alguns estudantes são homens

Sejam E = conjunto dos estudantes

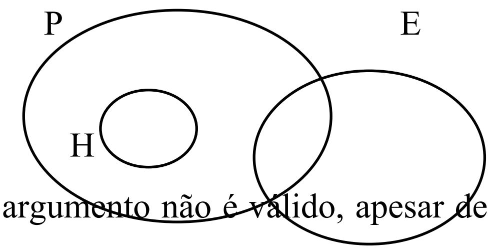
H = conjunto dos homens

P = conjunto dos preguiçosos

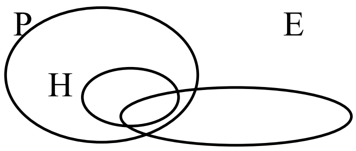
Temos através das premissas que:

1) $E \cap P \neq \varnothing$ (P_1) 2) $H \subset P$ (P_2)

O diagrama abaixo nos mostra uma situação em que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.



O argumento não é válido, apesar de podermos construir também um diagrama onde a conclusão é verdadeira.

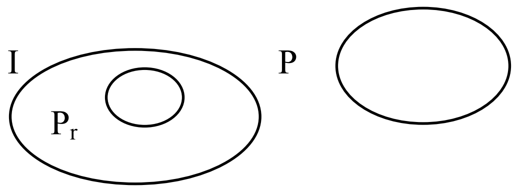


Para concluirmos a validade do argumento a representação do diagrama não pode deixar dúvida quanto a conclusão.

2) P_1 : Todo número primo é ímpar ($P_r \subset I$)

P_2 : Nenhum número ímpar é par ($I \cap P = \varnothing$)

Q : Existe um número primo que é par. ($P_r \cap P \neq \varnothing$)



O argumento não é válido apesar da proposição Q ser "verdadeira". Isto porque a conclusão não decorre das premissas.

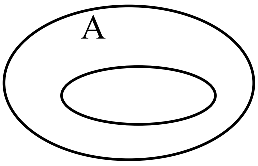
3) P_1 : Todos os advogados são ricos. ($A \subset R$)

P_2 : Poetas são temperamentais ($P \subset T$)

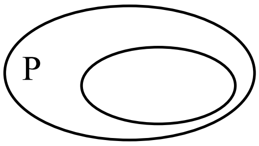
P_3 : Nenhuma pessoa temperamental é rica ($T \cap R = \varnothing$)

Q : Nenhum advogado é poeta. ($A \cap P = \varnothing$)

R



T



A conclusão é válida.